DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

[P31] *Freier Fall mit Reibung*

Die Differentialgleichung für die Bewegung eines Teilchens der Masse m im homogenen (in die negative x-Richtung wirkenden) Gravitationsfeld mit Erdbeschleunigung g und mit einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibung lautet $m\,\ddot{x}(t) = -D\,\dot{x}(t) - m\,g$.

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung eine spezielle Lösung der Form $x_{\mathrm{part}}(t) = v_\infty\,t$ besitzt, wobei v_∞ eine Konstante ist. Welchen Wert hat v_∞ ?

(b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung, indem Sie zunächst $v(t) := \dot{x}(t)$ mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen bestimmen und anschließend die Lösung für $x(t)$ durch direkte Integration. Wie ist dann $x_{\mathrm{hom}}(t)$ gegeben?
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Bewegungsgleichung ergibt sich dann laut Vorlesung als Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und der in (a) gefundenen speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung, $x(t) = x_{\mathrm{hom}}(t) + x_{\mathrm{part}}(t)$.

(c) Interpretieren Sie die spezielle Lösung $x_{\mathrm{part}}(t) = v_\infty\,t$ physikalisch. Warum wird die Konstante mit dem Symbol v_∞ bezeichnet?

(d) Wie viele freie Parameter sind in der allgemeinen Lösung $x(t)$ noch übrig? Wie werden diese durch die zu wählenden Anfangsbedingungen Starthöhe $x(0) = x_0 = h$ und Startgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = v_0$ festgelegt?

[P32] *Kraftstoß*

Eine Masse m falle aus einer Höhe h. Die Anfangsbedingungen lauten also $z(0) = h$ und $\dot{z}(0) = 0$. Während des Falles erfährt die Masse nun einen Kraftstoß

$$F_{\text{Stoß}}(t) = \gamma\,\delta(t - \sqrt{h/g})\,, \quad \gamma \geq 0\,.$$

Studieren Sie die Bewegung der Masse wie folgt:

(a) Geben Sie die Gesamtkraft $F_{\text{gesamt}}(t)$ an.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung durch zweimalige Integration.

(d) Skizzieren Sie die Lösung $z(t)$ für einige „typische“ Werte von γ als Funktion von t.

[P33] *Logistische Differentialgleichung*

Diese Differentialgleichung kennen wir schon aus der Aufgabe mit den Elefanten, [H21]. Allgemein ist dies ein Modell für die Entwicklung einer Population gemäß

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t)\,(\beta - P(t))\,, \quad \alpha, \beta > 0\,.$$

Der Faktor $\beta - P(t)$ hemmt das Wachstum großer Populationen.

(a) Lösen Sie die ODE (Ordinary Differential Equation = Gewöhnliche Differentialgleichung) diesmal durch Trennung der Variablen.

(b) Welchen Grenzwert erreicht $P(t)$ für $t \to \infty$? Lässt sich dies auch direkt aus der ODE ablesen?

(c) Starten Sie mit einer kleinen Population $0 < P(0) \ll \beta$. Bei welcher charakteristischen Population P_{crit} verlangsamt sich das Wachstum? Skizzieren Sie $P(t)$.